Лекція № 21

6.4. Поле заряду, який рухається рівномірно

Нехай в деякій інерціальній системі відліку S' є нерухомий точковий заряд e, який знаходиться в початку координат цієї системи. В довільній точці простору $\vec{r}'$ електростатичне поле точкового заряду визначається векторним та скалярним потенціалами

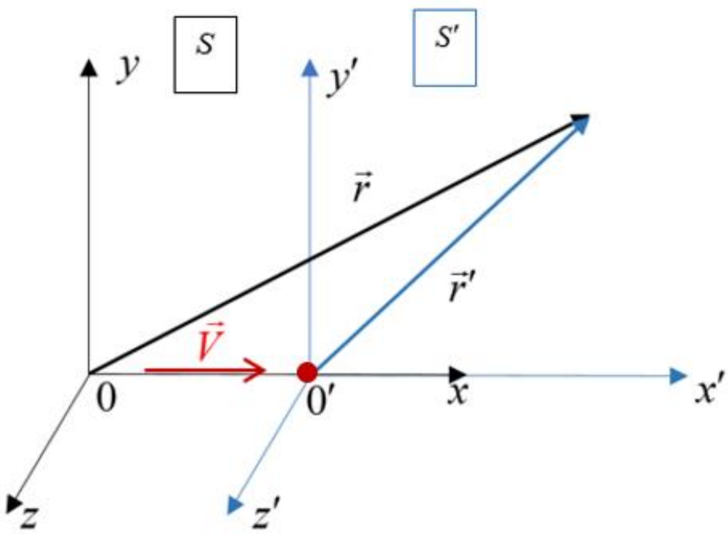
$$\varphi'(\vec{r}') = \frac{e}{r'}; \quad \vec{A}' = 0. \tag{6.15}$$

та векторами напруженості

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{r}'}{(r')^3}; \quad \vec{H}' = 0 \tag{6.16}$$

Тут $\vec{r}' = (x', y', z'), r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ – координати точки спостереження в системі S'.

Спостерігач знаходиться в інерціальній системі відліку S. Система S' рухається відносно S зі швидкістю V уздовж осі x (див. Рис.).



Використаємо перетворення Лоренца для потенціалів (4.36), щоб знайти φ та $\vec{A}$ в системі S. Нагадаємо загальний вигляд цих перетворень

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

Підставимо в них вирази (6.15)

$$A_x = \frac{\frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{Ve}{cr'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c}\varphi; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0;$$

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{r'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Модуль радіус-вектору r' знаходимо також згідно із перетвореннями Лоренца:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z = z';$$

$$r' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left[(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2}. \tag{6.17}$$

$$\varphi = \frac{e}{\cancel{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}\cancel{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{1}{\left[(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{e}{\left[(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2}}.$$

Отримуємо таку формулу для скалярного потенціалу заряду, який рухається зі сталою швидкістю уздовж осі x

$$\varphi(x,y,z) = \frac{e}{\left[(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2}} = \frac{e}{R^*}. \tag{6.18}$$

В (6.18) введено скорочене позначення

$$R^* = r'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \left[(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2} \tag{6.19}$$

Векторний потенціал заряду, який рухається зі сталою швидкістю уздовж осі x, має напрямок швидкості $\vec{V} \parallel Ox$ та виглядає так

$$\vec{A} = \frac{\vec{V}}{c}\frac{e}{\left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{1/2}} = \frac{\vec{V}}{c}\frac{e}{R^*}; \tag{6.20}$$

$$\vec{V} = (V, 0, 0).$$

Формули для напруженості електромагнітного поля отримаємо із загальних формул для перетворення компонент $\vec{E}$ та $\vec{H}$ (див. ф-ли (4.38))

$$E_x = E'_x;\quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};\quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

$$H_x = H'_x;\quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};\quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Підставимо в них формули (6.16):

$$E_x = E'_x;\quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};\quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

$$H_x = 0;\quad H_y = -\frac{\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};\quad H_z = \frac{\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Далі:

$$E_x = \frac{ex'}{r'^3};\quad E_y = \frac{ey'}{r'^3\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)};\quad E_z = \frac{ez'}{r'^3\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)};$$

$$H_x = 0;\quad H_y = -\frac{\frac{V}{c}ez'}{r'^3\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)};\quad H_z = \frac{\frac{V}{c}ey'}{r'^3\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}.$$

Помічаємо відразу, що магнітне поле заряду, який рухається рівномірно, перпендикулярно його електричному полю. Це збігається з формулою (4.45), яку отримали для загального випадку перетворень Лоренца за умови відсутності магнітного поля в деякій системі відліку.

Підставляємо у явному вигляді x', y', z', r' з (6.17), потім згадуємо про введене для скалярного та векторного потенціалів позначення для R^*. Отримуємо

$$E_x = \frac{e(x-Vt)\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}}}{\cancel{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\left[(x-Vt)^2+\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} = \frac{e(x-Vt)\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{(R^*)^3};$$

$$E_y = \frac{ey\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}}}{\cancel{\left(\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)}\left[(x-Vt)^2+\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} = \frac{ey\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{(R^*)^3}$$

$$E_z = \frac{ez\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}}}{\cancel{\left(\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)}\left[(x-Vt)^2+\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} = \frac{ez\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{(R^*)^3}.$$

$$H_x = 0;$$

$$H_y = -\frac{\dfrac{V}{c}ez\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}}}{\cancel{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\left[(x-Vt)^2+\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} = -\frac{V}{c}\frac{ez\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{(R^*)^3} = -\frac{V}{c}E_z;$$

$$H_z = \frac{\dfrac{V}{c}ey\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}}}{\cancel{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\left[(x-Vt)^2+\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} = \frac{V}{c}\frac{ey\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{(R^*)^3} = \frac{V}{c}E_y.$$

Об'єднаємо формули для трьох проекцій напруженості електричного поля заряду, що рухається рівномірно, у векторну формулу

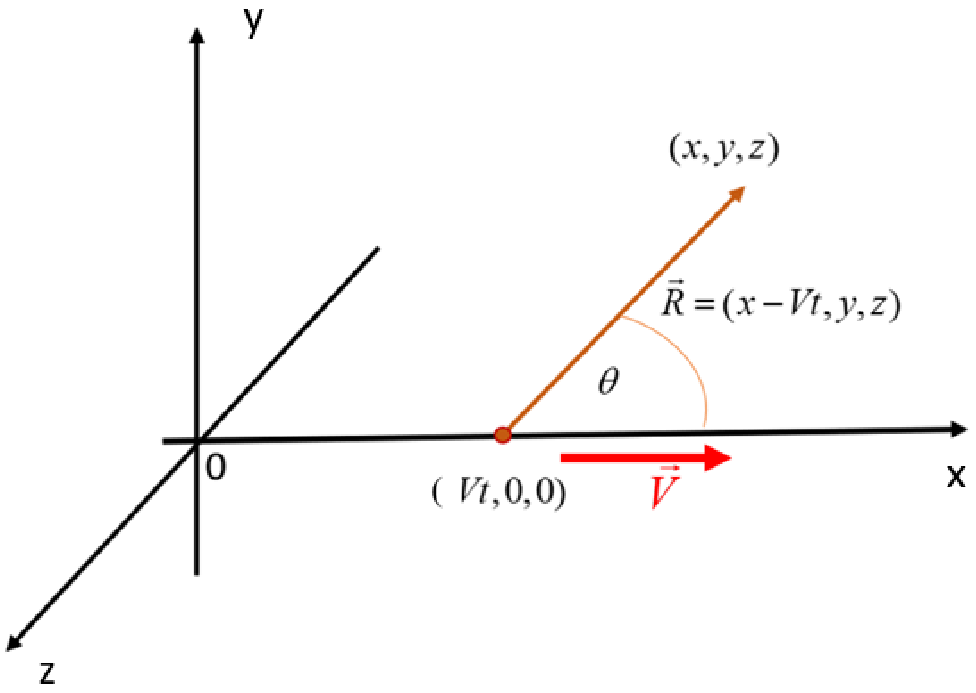
$$\vec{E}=\frac{e\vec{R}}{(R^*)^3}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right);$$

$$\vec{R}=(x-Vt,y,z);\quad R^*=\left[(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{1/2}. \tag{6.21}$$

Відповідна напруженість магнітного поля згідно з (4.45) та (6.21)

$$\vec{H}=\frac{e\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{c(R^*)^3}[\vec{V},\vec{R}]. \tag{6.22}$$

Введемо в формули (6.21) та (6.22) залежність від кута між напрямком руху заряду (це напрямок швидкості $\vec{V}$) та вектором $\vec{R}$ (це вектор, направлений від заряду в точку спостереження)



Маємо

$$\vec{R}=(x-Vt,y,z);\quad R=\sqrt{(x-Vt)^2+y^2+z^2};$$

$$x-Vt=R\cos\theta;\quad \sqrt{y^2+z^2}=R\sin\theta;$$

$$(R^*)^2=R^2\left[\cos^2\theta+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\right]=R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right).$$

Нові формули

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{R^3\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}; \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right]. \tag{6.23}$$

годяться для будь-якого напрямку руху заряду.

Модуль напруженості електричного поля в напрямку руху, тобто при $\theta = 0$ та в напрямку, протилежному напрямку руху $(\theta = \pi)$ визначається формулою

$$E_{\parallel} = \frac{e\cancel{R}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{R^{\cancel{3}2}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\underbrace{\cancel{\sin^2\theta}}_{=0}\right)^{3/2}} = \frac{e\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{R^2};$$

$$E_{\parallel} = \frac{e\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{R^2} < \frac{e}{R^2}. \tag{6.24}$$

В напрямку, перпендикулярному руху $(\theta = \pi/2)$

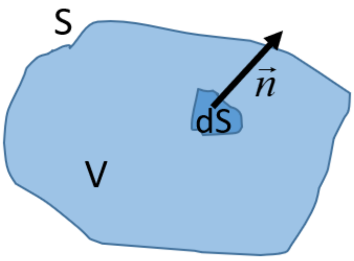
$$E_{\perp} = \frac{eR\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{R^3\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\underbrace{\sin^2\theta}_{=1}\right)^{3/2}} = \frac{e\cancel{R}\cancel{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}}{R^{\cancel{3}2}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\cancel{3/2}1/2}} = \frac{e}{R^2\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} > \frac{e}{R^2}. \tag{6.25}$$

Поле заряду, який рухається з великою швидкістю «сплющується» у напрямку руху. Зі зростанням швидкості руху напруженість електричного поля в напрямку руху (6.24) зменшується, а в напрямку, перпендикулярному руху збільшується (6.25).

6.5. Інтегрування рівняння Пуассона

Напишемо рівняння Пуассона (6.4)



$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

в інтегральному вигляді. В деяких випадках це дозволяє знайти його розв'язок.

Нам знадобиться відома з курсу математичного аналізу тотожність Гріна:

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \oiint\limits_S \left(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi\right)d\vec{S}. \qquad (6.26)$$

Тут $\varphi(\vec{r}),\psi(\vec{r})$ – довільні скаляри, які є диференційованими, V – довільний об'єм, S – поверхня, яка обмежує цей об'єм, $\frac{\partial\varphi}{\partial n},\frac{\partial\psi}{\partial n}$ – похідні по нормалі до поверхні S, тобто – проєкції градієнтів $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(\nabla\varphi,\vec{n}\right), \frac{\partial\psi}{\partial n} = \left(\nabla\psi,\vec{n}\right)$ на напрямок зовнішньої нормалі $\vec{n}$ $(d\vec{S} = \vec{n}dS)$ до поверхні.

Для доказу (6.26) скористаємось теоремою Гауса

$$\oiint\limits_S \vec{a}d\vec{S} = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}dV.$$

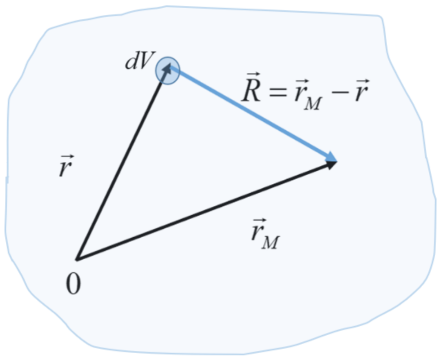
Обираємо $\vec{a} = \varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi$. Шукаємо

$$\mathrm{div}\vec{a} = \left(\nabla,\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi\right) = \left(\nabla,\varphi\nabla\psi\right) - \left(\nabla,\psi\nabla\varphi\right) =$$
$$= \varphi\left(\nabla,\nabla\right)\psi + \cancel{\left(\nabla\varphi,\nabla\psi\right)} - \psi\left(\nabla,\nabla\right)\varphi - \cancel{\left(\nabla\psi,\nabla\varphi\right)} =$$
$$= \varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi.$$

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oiint\limits_S \left(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi\right)d\vec{S}.$$

Тотожність Гріна (6.26) доведено.

Обираємо довільний об'єм V та довільну точку M всередині. Шукаємо потенціал φ в точці M (див. рис.)



$\vec{r}_M$ – радіус-вектор точки, потенціал в якій хочемо визначити, $\vec{r}$ – радіус-вектор точок інтегрування. $\vec{R}=\vec{r}_M-\vec{r}$ – відстань між ними. Обидві точки знаходяться в об'ємі V. $\vec{r}_M$ – незалежна змінна, $\vec{r}$ – змінна інтегрування.

Нехай

$$\psi=\frac{1}{R}.$$

Це фактично знайдений раніш потенціал поля точкового заряду (без множнику e), який задовольняє рівнянню

$$\Delta\psi=-4\pi\delta(\vec{r}_M-\vec{r}). \qquad (6.27)$$

Нехай $\varphi(\vec{r})$ також задовольняє рівнянню Пуассона, але для довільної густини заряду $\rho(\vec{r})$ (ф-ла (6.4))

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho.$$

Підставляємо (6.27) та (6.4) в тотожність Гріна (6.26):

$$\iiint\limits_V\left[\varphi\left(-4\pi\delta(\vec{r}_M-\vec{r})\right)+4\pi\rho(\vec{r})\frac{1}{|\vec{r}_M-\vec{r}|}\right]dV=\oint\!\!\oint\limits_S\left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dS.$$

Дельта-функція «знімає» інтегрування у першому доданку зліва

$$-4\pi\varphi(\vec{r}_M)+4\pi\iiint\limits_V\left[\rho(\vec{r})\frac{1}{|\vec{r}_M-\vec{r}|}\right]dV=\oint\!\!\oint\limits_S\left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dS.$$

Отримали **рівняння Пуассона в інтегральній формі**

$$\varphi(\vec{r}_M)=\iiint\limits_V\left[\rho(\vec{r})\frac{1}{|\vec{r}_M-\vec{r}|}\right]dV-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint\limits_S\left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dS. \qquad (6.28)$$

Обговоримо значення доданків в правій частині (6.28). Перший доданок – інтеграл по об'єму – є наслідком принципу суперпозиції. Нескінченно малий заряд $\rho(\vec{r})dV$, який можна вважати точковим, має потенціал

$$d\varphi_{\text{point charge}} = \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\vec{r}_M - \vec{r}\,|}.$$

Повний потенціал знаходимо, взявши інтеграл по усьому об’єму V

$$\iiint_V \left[\rho(\vec{r}\,)\frac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}\,|}\right] dV.$$

Другий доданок

$$-\frac{1}{4\pi}\oiint_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dS$$

описує поле, яке створюють заряди, що знаходяться зовні від об’єму V та на поверхні S. Ці заряди враховані у неявному вигляді через функцію φ та похідну $E_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Якщо зарядів зовні від об’єму V немає. Цей доданок дорівнює 0. Маємо

$$\varphi(\vec{r}_M) = \iiint_V \left[\rho(\vec{r}\,)\frac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}\,|}\right] dV.$$

Змінимо позначення в інтегралі на більш звичні: $\vec{r}_M \to \vec{r}, \vec{r} \to \vec{r}\,'$. Тепер електростатичний потенціал всередині об’єму V за відсутності зарядів зовні від V дорівнює

$$\varphi(\vec{r}\,) = \iiint_V \left[\rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] dV'. \qquad (6.29)$$